Maths Expertes | **CS n°1 du Vendredi 16 décembre 2022** | **Thiaude P.**

Durée : 1h | **Calculatrice INTERDITE**

<u>Exercice 1</u> [3 points]

Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $x^2 + 5x \equiv 6\ [7]$.

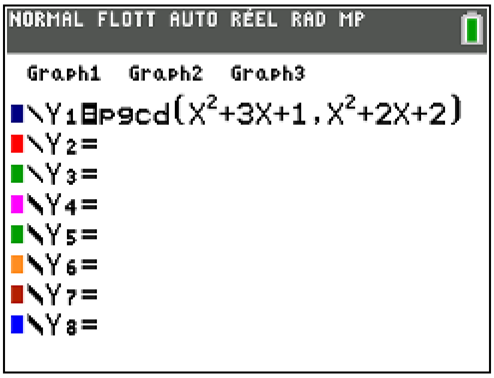
<u>Exercice 2</u> [4 points]

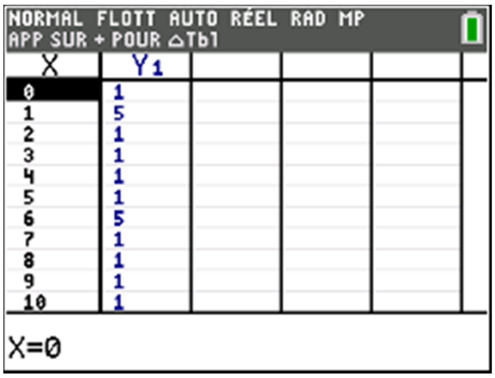
Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{Z}, 15 | n(n^4 - 1)$.

<u>Exercice 3</u> [6 points]

Déterminer en fonction de n le $\mathrm{PGCD}(n^2 + 3n + 1, n^2 + 2n + 2)$, $n \in \mathbb{N}$.

Pour information :





<u>Exercice 4</u> [6 points]

On considère l'équation (E) d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$: $43x - 19y = 1$.

1. Déterminer une solution particulière (x_0, y_0) de (E).

2. Déterminer toutes les solutions de (E).

<u>Exercice 5</u> [1 point]

Soient a, b deux entiers relatifs, m et m' deux entiers naturels non nuls premiers entre eux.

On considère le système (S) d'inconnue $n \in \mathbb{Z}$: $\begin{cases} n \equiv a\ [m] \\ n \equiv b\ [m'] \end{cases}$ et on note n_0 une solution particulière de (S).

Un élève affirme que : « n est une solution de (S) si et seulement si $n \equiv n_0\ [m \times m']$ » .
Si cette affirmation est fausse trouver un contre-exemple, sinon la démontrer.

Corrigé

Exercice 1

$x^2 + 5x \equiv 6\ [7]$

Utilisons un tableau de congruence **modulo 7**

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	6
$x^2 + 5x \equiv$	$0^2 + 5(0)$ $\equiv 0$	$1^2 + 5(1)$ $\equiv 6$	$2^2 + 5(2)$ $\equiv 4 + 10$ $\equiv 14$ $\equiv 0$	$3^2 + 5(3)$ $\equiv 9 + 15$ $\equiv 2 + 1$ $\equiv 3$	$4^2 + 5(4)$ $\equiv 16 + 20$ $\equiv 2 + (-1)$ $\equiv 1$	$5^2 + 5(5)$ $\equiv 25 + 25$ $\equiv 50$ $\equiv 1$	$6^2 + 5(6)$ $\equiv (-1)^2 + 5(-1)$ $\equiv 1 - 5$ $\equiv -4$ $\equiv 3$

Par disjonction de cas, on a l'équivalence : $x^2 + 5x \equiv 6\ [7] \Leftrightarrow x \equiv 1\ [7]$.

Exercice 2

On a :

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{PGCD}(n^2 + 3n + 1, n^2 + 2n + 2) \\
&= \mathrm{PGCD}(n^2 + 3n + 1 - (n^2 + 2n + 2), n^2 + 2n + 2) \\
&= \mathrm{PGCD}(n^2 + 3n + 1 - n^2 - 2n - 2, n^2 + 2n + 2) \\
&= \mathrm{PGCD}(n - 1, n^2 + 2n + 2) \\
&= \mathrm{PGCD}\big(n - 1, n^2 + 2n + 2 - n(n - 1)\big) \\
&= \mathrm{PGCD}(n - 1, n^2 + 2n + 2 - n^2 + n) \\
&= \mathrm{PGCD}(n - 1, 3n + 2) \\
&= \mathrm{PGCD}\big(n - 1, 3n + 2 - 3(n - 1)\big) \\
&= \mathrm{PGCD}(n - 1, 3n + 2 - 3n + 3) \\
&= \mathrm{PGCD}(n - 1, 5)
\end{aligned}
$$

Comme les seuls diviseurs positifs de 5 sont 1 et 5, on en déduit $\mathrm{PGCD}(n - 1, 5) = 1$ ou 5.

- $\mathrm{PGCD}(n - 1, 5) = 5 \Leftrightarrow 5 | n - 1 \Leftrightarrow n \equiv 1\ [5]$
- $n \not\equiv 1\ [5] \Leftrightarrow \mathrm{PGCD}(n - 1, 5) \neq 5$, or $\mathrm{PGCD}(n - 1, 5) = 1$ ou 5, donc : $\mathrm{PGCD}(n - 1, 5) = 1$.

Conclusion

Si $n \equiv 1\ [5]$, alors $\mathrm{PGCD}(n^2 + 3n + 1, n^2 + 2n + 2) = 5$,
sinon $\mathrm{PGCD}(n^2 + 3n + 1, n^2 + 2n + 2) = 1$.

Exercice 3

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{Z}, 15 | n(n^4 - 1)$.

- démontrons que : $\forall n \in \mathbb{Z}, 3 | n(n^4 - 1)$

On utilise un tableau de congruence **modulo 3**

$n \equiv$	0	1	2
$n^4 - 1 \equiv$	$0^4 - 1$ $\equiv -1$	$1^4 - 1$ $\equiv 0$	$2^4 - 1$ $\equiv 15$ $\equiv 0$
$n(n^4 - 1) \equiv$	$0(-1)$ $\equiv 0$	$1(0)$ $\equiv 0$	$2(0)$ $\equiv 0$

Par disjonctions de cas on peut affirmer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $n(n^4 - 1) \equiv 0\ [3]$ autrement dit :
pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $3 | n(n^4 - 1)$.

• démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $5|n(n^4-1)$

On utilise un tableau de congruence **modulo 5**

$n \equiv$	0	1	2	3	4
$n^4-1 \equiv$	0^4-1 $\equiv -1$	1^4-1 $\equiv 0$	2^4-1 $\equiv 15$ $\equiv 0$	3^4-1 $\equiv 9^2-1$ $\equiv (-1)^2-1$ $\equiv 0$	4^4-1 $\equiv 16^2-1$ $\equiv 1^2-1$ $\equiv 0$
$n(n^4-1) \equiv$	$0(-1)$ $\equiv 0$	$1(0)$ $\equiv 0$	$2(0)$ $\equiv 0$	$3(0)$ $\equiv 0$	$4(0)$ $\equiv 0$

Par disjonctions de cas on peut affirmer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $n(n^4-1) \equiv 0\ [5]$ autrement dit pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $5|n(n^4-1)$.

• Soit $n \in \mathbb{Z}$.
On a : $3|n(n^4-1)$ et $5|n(n^4-1)$ avec 3 et 5 premiers entre eux donc d'après le corollaire du théorème de Gauss on en déduit que : $3 \times 5|n(n^4-1)$, autrement dit : $15|n(n^4-1)$.

On a donc bien : $\forall n \in \mathbb{Z}, 15|n(n^4-1)$.

Exercice 4

1. Déterminons $\text{PGCD}(43, 19)$ par l'algorithme d'Euclide.

$a = \mathbf{43}$
$b = \mathbf{19}$
$43 = 2 \times 19 + \mathbf{5}$
$19 = 3 \times 5 + \mathbf{4}$
$5 = 1 \times 4 + \mathbf{1}$
$4 = 4 \times 1 + \mathbf{0}$

Le PGCD est le dernier reste non nul donc $\text{PGCD}(43, 19) = 1$.

En remontant les calculs à partir de l'avant dernière ligne :

$$5 - 4 = 1$$
$$5 - (19 - 3 \times 5) = 1$$
$$5 - 19 + 3 \times 5 = 1$$
$$4 \times 5 - 19 = 1$$
$$4 \times (43 - 2 \times 19) - 19 = 1$$
$$4 \times 43 - 8 \times 19 - 19 = 1$$
$$4 \times 43 - 9 \times 19 = 1$$

Donc $(x_0, y_0) = (4, 9)$ est une solution particulière de (E) : $43x - 19y = 1$.

2. Analyse

Soit (x, y) une solution de (E).
On a : $43x - 19y = 1$ et $43x_0 - 19y_0 = 1$ donc $43x - 19y = 43x_0 - 19y_0$ autrement dit :
$43(x - x_0) = 19(y - y_0)\ (*)$.
On a : $43|43(x - x_0)$ et $43(x - x_0) = 19(y - y_0)$ donc $43|19(y - y_0)$.
On a : $43|19(y - y_0)$ avec 43 et 19 premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss on en déduit $43|y - y_0$: il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y - y_0 = 43k$,autrement dit tel que : $y = y_0 + 43k$.
En remplaçant dans $(*)$, on obtient : $43(x - x_0) = 19 \times 43k \Leftrightarrow x - x_0 = 19k \Leftrightarrow x = x_0 + 19k$.
Toute solution de (E) est de la forme $(x_0 + 19k, y_0 + 43k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Synthèse
Considérons un couple $(x_0 + 19k, y_0 + 43k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et montrons qu'il vérifie (E) :
$43(x_0 + 19k) - 19(y_0 + 43k) = 43x_0 - 19y_0 + 43 \times 19k - 19 \times 43k = 1 + 0 = 1$.

Conclusion
Les solutions de (E) sont tous les couples $(x_0 + 19k, y_0 + 43k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire tous les couples $(4 + 19k, 9 + 43k)$ où $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 5

a, b entiers relatifs, m et m' entiers naturels non nuls premiers entre eux.
(S) système d'inconnue $n \in \mathbb{Z}$: $\begin{cases} n \equiv a \ [m] \\ n \equiv b \ [m'] \end{cases}$, n_0 solution particulière de (S).

Montrons que l'affirmation : « n est une solution de (S) si et seulement si $n \equiv n_0 \ [m \times m']$ » est exacte.

Analyse
Soit n une solution de (S) :

• n et n_0 vérifient en particulier la première ligne de (S) donc : $n \equiv a \ [m]$ et $n_0 \equiv a \ [m]$ d'où, par transitivité : $n \equiv n_0 \ [m]$ autrement dit : $m | n - n_0$.

• n et n_0 vérifient en particulier la deuxième ligne de (S) donc : $n \equiv b \ [m']$ et $n_0 \equiv b \ [m']$ d'où, par transitivité : $n \equiv n_0 \ [m']$ autrement dit : $m' | n - n_0$.
On a : $m | n - n_0$ et $m' | n - n_0$ avec m et m' premiers entre eux donc d'après le corollaire du théorème de Gauss on en déduit : $m \times m' | n - n_0$ autrement dit : $n \equiv n_0 \ [m \times m']$.

Synthèse
Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \equiv n_0 \ [m \times m']$: il existe $k \in \mathbb{Z}, n = n_0 + kmm'$.
• montrons que $n \equiv a \ [m]$.
Rappelons que n_0 est une solution de (S) donc vérifie en particulier la première ligne : $n_0 \equiv a \ [m]$.
Raisonnons modulo m : $n = n_0 + kmm' \equiv a + kmm' - km' \times m \equiv a \ [m]$.
On a bien : $n \equiv a \ [m]$.

• montrons que $n \equiv b \ [m']$.
Rappelons que n_0 est une solution de (S) donc vérifie en particulier la deuxième ligne : $n_0 \equiv b \ [m']$.
Raisonnons modulo m' : $n = n_0 + kmm' \equiv b + kmm' - km \times m' \equiv b \ [m']$.
On a bien : $n \equiv b \ [m']$.

• On a : $n \equiv a \ [m]$ et $n \equiv b \ [m']$ donc n est bien solution de (S).

Conclusion : n est solution de (S) si et seulement si $n \equiv n_0 \ [m \times m']$.